Aufgabe 9.1 Welche der Aussagen sind wahr? (Hier sind $x, y \in \mathbb{R}$.)

a) $0 < 1 \vee 1 > 2$,

b) $0 > 1 \wedge 1 > 2$,

c) $0 < 1 \implies 1 < 2$,

d) $0 > 1 \implies 1 > 2$,

e) $(\exists x)\ x^2 = 4$,

f) $(\exists! x)\ x^2 = 4$
(es existiert ein eindeutiges x),

g) $(\forall x)\ (\exists y)\ x < y$,

h) $(\exists x)\ (\forall y)\ x < y$,

i) $(\forall x)\ (\exists y)\big[x < 0 \wedge y < 0 \implies xy > 0\big]$.

Aufgabe 9.2 Unter Verwendung der Aussagen

A: “Der Student hat die Lehrveranstaltungen besucht.”

B: “Der Student hat gewissenhaft studiert.”

C: “Der Student hat die Übungsaufgaben gelöst.”

D: “Der Student hat das Examen bestanden.”

beschreibe symbolisch:

a) Wenn der Student die Lehrveranstaltungen besucht hat, gewissenhaft studiert hat und die Übungsaufgaben gelöst hat, besteht er das Examen.

b) Wenn der Student die Lehrveranstaltungen besucht hat, aber nicht gewissenhaft studiert hat und die Übungsaufgaben nicht gelöst hat, besteht er das Examen nicht.

c) Der Student besteht das Examen genau dann, wenn er die Lehrveranstaltungen besucht hat, gewissen haft studiert hat und die Übungsaufgaben gelöst hat.

Bilde die Negation der erhaltenen Aussageverbindungen und formuliere diese in Worten.

Aufgabe 9.3 Verneine die Aussagen aus Aufgabe 2. Sorge dafür, dass in den neuen Aussagen das Zeichen $\neg$ nur vor den “Buchstaben” vorkommt.

Aufgabe 9.4 Beweise die folgenden Tautologien mithilfe einer Wahrheitstafel.

a) $\big(A \implies \neg A\big) \implies \neg A$,

b) $A \vee \big(B \wedge \neg B\big) \iff \neg A$,

c) $\Big[A \vee \big(B \wedge C\big)\Big] \iff \Big[\big(A \vee B\big) \wedge \big(A \vee C\big)\Big]$,

d) $\Big[\big(A \wedge \neg B\big) \implies \big(C \wedge \neg C\big)\Big] \iff \big(A \implies B\big)$.

Aufgabe 9.5 Sei $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ und $C = \{1, 2, 5, 6\}$.
Bestimme $(A \cap B) \cup C$, $(B \cap C) \cup A$, $(C \cap A) \cup B$, $A \cap (B \cup C)$, $B \cap (C \cup A)$, $C \cap (A \cup B)$.

Beispiel. Wir bezeichnen $\underline{n} := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Es gilt

$$\underline{3} \subset \underline{5}, \quad 3 \in \underline{5}, \quad \{3\} \subset \underline{5}, \quad \{2,3\} \subset \underline{5}, \quad 5 \notin \underline{3}, \quad \underline{5} \not\subset \underline{3}.$$

Die Elemente von $A = \{\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}$ sind selbst Mengen, also

$$\underline{2} \in A, \quad 2 \notin A, \quad \{\underline{2}, \underline{3}\} \subset A, \quad \{2,3\} \not\subset A, \quad \{2,3\} \notin A.$$

Aufgabe 9.6 Bestimme alle Teilmengen von $\varnothing$, $\underline{1}$, $\underline{2}$.

Beispiel. Wir beweisen die Aussage $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$.

2) rechte Menge $\subset$ linke Menge (die andere Richtung wurde in der Vorlesung gezeigt). Sei $x \in (A \cup B) \cap (B \cup C)$. Dies ist äquivalent zu $x \in A \cup B$ und $x \in B \cup C$ bzw. ($x \in A$ oder $x \in B$) und ($x \in A$ oder $x \in C$). Also auf jeden Fall ist $x \in A$ und in B oder C. Somit $x \in A \cup (B \cap C)$. $\square$

Aufgabe 9.7 Beweise die De Morganschen Regeln:

a) $U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$,

b) $U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B)$.

Aufgabe 9.8 Beweise (hier sind A, B, C beliebige Mengen)

a) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$,

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,